

Capítulo 3

Sistemas de Ecuaciones Lineales

3.1. Definición

Un conjunto finito de ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, \dots, x_n$; recibe el nombre de sistema de ecuaciones lineales.

En general un sistema de ' m ' ecuaciones con ' n ' incógnitas es el resultado de la ecuación matricial siguiente:

$$A_{(m,n)} X_{(n,1)} = B_{(m,1)}$$

Desarrollando:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

La matriz A , cuyos elementos son los coeficientes del sistema, se denomina matriz de los coeficientes ó matriz del sistema. En el caso de incluir en la matriz de los coeficientes, la columna de los términos independientes, la matriz así obtenida recibe el nombre de matriz ampliada o aumentada.

Significa que:

$$\text{Matriz de los coeficientes: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz ampliada: } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Una solución de un sistema de ecuaciones lineales, es una colección ordenada de n números, $s_1, s_2, \dots, s_n$; que tienen la propiedad de que cada ecuación se satisface cuando se sustituyen: $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$.

Si el sistema lineal no tiene solución, se afirma que es incompatible o inconsistente y si al menos tiene una solución entonces se denomina compatible o consistente. A su vez los sistemas compatibles se subdividen en sistemas determinados (número limitado de soluciones) y sistemas indeterminados (número ilimitado de soluciones).

3.2. Regla de Cramer

Si la matriz de los coeficientes A de orden $(n \times n)$ es no singular y B es de orden $(n \times 1)$, entonces el sistema lineal de ' n ' ecuaciones con ' n ' incógnitas: $AX = B$; admite solución única y esa solución está dada por:

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}; \text{ donde: } j = 1, 2, \dots, n$$

Es decir:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}; \dots; x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Ejemplo 3.1 Resolver por la regla de Cramer los sistemas siguientes:

a)

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \end{cases}$$

Calculando el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{Por G-Chio}}{=} (1) \begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{Por Cofactores}}{=} (1) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -14 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{Por G-Chio}}{=} (1) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -12 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (1)(1) \begin{vmatrix} 0 & 12 & -24 \\ 0 & 12 & -22 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{Por Cofactores}}{=} (1)(1) \begin{vmatrix} 12 & -24 \\ 12 & -22 \end{vmatrix} = [12(-22) - (12)(-24)] = 24 \neq 0$$

Como $|A| \neq 0$; entonces la matriz A es no singular. Luego, reemplazando en la columna de x_1 los términos independientes y resolviendo el determinante se tiene:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & -5 & 0 \\ 12 & 2 & 0 & -5 \\ -4 & 0 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

Asimismo:

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & -5 \\ 1 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & -3 & 4 \end{vmatrix}}{24} = \frac{48}{24} = 2$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 12 & -5 \\ 1 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \end{vmatrix}}{24} = \frac{24}{24} = \boxed{1}$$

$$x_4 = \frac{|A_4|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{vmatrix}}{24} = \frac{-24}{24} = \boxed{-1}$$

$$b) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= -2 \end{aligned}$$

$$c) \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 1/5 \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 4/5 \end{aligned}$$

3.3. Sistema homogéneo de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales se afirma que es homogéneo, cuando los términos independientes o elementos del segundo miembro son todos igual a cero.

Es decir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Asimismo:

$$AX = 0$$

Todo sistema homogéneo de ecuaciones lineales es compatible, puesto que: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$ siempre es una solución. Esta solución es única y se denomina solución trivial. Cualquier otra solución si existe se llama solución diferente de cero o no trivial.

3.3.1. Teorema

Un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, con más incógnitas que ecuaciones, siempre tiene un número infinito de soluciones.

3.3.2. Resolución de sistemas homogéneos por Gauss-Jordan

Ejemplo 3.2 Resolver los sistemas siguientes:

a)
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

3	-1	-4	0
2	5	2	0
1	2	-3	0
0	-7	5	0
0	1	8	0
1	2	-3	0
0	0	61	0
0	1	8	0
1	0	-19	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0

$0 \cdot (5) = 0$

$3(-1)(5) = -15$

Luego, el sistema se transforma:

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 = 0 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{Sol. trivial})$$

b)
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = 0 \end{cases}$$

Por teorema, este sistema tiene infinitas soluciones.

2	0	2	-1	-1	0
1	-1	1	-1	0	0
2	0	0	-1	-1	0
1	1	-3	0	-1	0
0	2	0	1	-1	0
1	-1	1	-1	0	0
0	2	-2	1	-1	0
0	2	-4	1	-1	0
0	2	0	1	-1	0
1	1	1	0	-1	0
0	0	-2	0	0	0
0	0	-4	0	0	0
0	2	0	1	-1	0
1	1	0	0	-1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

Luego, el sistema se transforma:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_4 - x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = x_5 - 2x_2 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = x_5 - x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Asignando escalares a las variables independientes, es decir:

Si:

$$\begin{cases} x_2 = \alpha \\ x_5 = \beta \\ x_4 = \beta - 2\alpha \\ x_1 = \beta - \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

(Infinitas soluciones)

$$c) \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \therefore \text{Infinitas soluciones.}$$

$$d) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases} \therefore \text{Infinitas soluciones.}$$

3.4. Rango de una matriz

Considerando a los elementos de una matriz como un conjunto de vectores columna, se denomina rango de una matriz al número máximo de vectores columna unitarios distintos.

Los vectores columna unitarios se obtienen con los elementos de una matriz, realizando sobre sus filas operaciones elementales y una forma de realizar esas operaciones elementales es también aplicando las reglas de Gauss-Jordan.

Ejemplo 3.3 Hallar el rango de la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & -1 \\ -5 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

-2	1	3	-1
3	-1	4	-1
-5	2	-1	0
-2	1	3	-1
1	0	7	-2
-1	0	-7	2
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	17	-5
		7	-2
		0	0

De donde, el rango de la matriz A es: $\mathcal{P}(A) = 2$.

Por otra parte, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.5. Teorema de Rouché-Frobenius

Un sistema de ecuaciones lineales es compatible (admite por lo menos una solución), si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

En símbolos: $AX = B$ es compatible $\Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A')$.

Un sistema de ecuaciones lineales es incompatible (no tiene solución), si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes es menor al rango de la matriz ampliada.

En símbolos: $AX = B$ es incompatible $\Leftrightarrow \mathcal{P}(A) < \mathcal{P}(A')$.

Ejemplo 3.4 Resolver los sistemas siguientes:

$$a) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

3	3	3	-3	5
3	2	-1	2	4
2	1	-2	3	1
-3	0	9	-12	2
-1	0	3	-4	2
2	1	-2	3	1
0	0	0	0	-4
1	0	-3	4	-2
0	1	4	-5	5
0	0	0	0	1
1	0	-3	4	0
0	1	4	-5	0

Luego se aplica el Teorema: $\mathcal{P}(A) = 2$; $\mathcal{P}(A') = 3$.

En vista de que: $\mathcal{P}(A) < \mathcal{P}(A')$; entonces el sistema es incompatible (no tiene solución).

$$b) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

1	3	0	-3	1
0	-7	3	1	-3
1	-2	3	-4	4
0	1	-1	1	-3
1	3	0	-3	1
0	-7	3	1	-3
0	-5	3	-1	3
0	1	-1	1	-3
1	-18	9	0	-8
0	-7	3	1	-3
0	-12	6	0	0
0	8	-4	0	0
1	0	0	0	-8
0	-1	0	1	-3
0	0	0	0	0
0	-2	1	0	0

Luego, se aplica el Teorema:

$\mathcal{P}(A) = 3 = \mathcal{P}(A')$; entonces el sistema es compatible. De donde:

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ -x_2 + x_4 = -3 \Rightarrow x_4 = x_2 - 3 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

Asignando escalares a las variables independientes, se tiene:

$$\begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 2\alpha \\ x_4 = \alpha - 3 \end{cases}$$

(Infinitas soluciones)

$$c) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 9 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{cases} \therefore \text{Infinitas soluciones.}$$

$$d) \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7 \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases} \therefore \text{Incompatible.}$$

$$e) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \therefore \text{Infinitas soluciones.}$$